DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1987 D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (1) DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

PARTIE I

n et k sont deux entiers tels que $2 \leq k \leq n$. End $(\mathbb{C}^n)$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Soient k éléments de End $(\mathbb{C}^n)$: $f_1, \ldots\ldots, f_k$ distincts de l'endomorphisme 0 (élément neutre de l'addition des applications) tels que :

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_k = Id & (Id : \text{application identique}) \\ f_i \circ f_j = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

1) On appelle projecteur un endomorphisme P tel que PoP = P. Quelles relations existe-t-il entre les noyaux et images de P et de Id - P ?

Montrer que, quel que soit i, f_i et Id - f_i sont des projecteurs.

2) Montrer que $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_k$ sont des éléments linéairement indépendants de End $(\mathbb{C}^n)$.

3) On pose Im $(f_i) = E_i$.

a) Montrer que : $x_i \in E_i \Rightarrow \begin{cases} f_i(x_i) = x_i \\ f_j(x_i) = 0 \ \forall j \neq i \end{cases}$

En déduire que $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_k$.

b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f_i.

4) a) $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k)$ étant donnés tous distincts dans $\mathbb{C}$, déterminer pour $p \in \mathbb{N}^*$ la puissance pième de l'endomorphisme f défini par :

$$f = a_1 f_1 + \ldots\ldots + a_k f_k$$

b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

5) Montrer que les endomorphismes f_i, Id, f, f^2, ..., f^{k-1} ne sont pas linéairement indépendants.

6) a) Montrer que pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq k$, il existe un polynôme P_i, appartenant à l'anneau $\mathbb{C}[X]$, de degré (k - 1) vérifiant :

$$\begin{cases} P_i(a_i) = 1 \\ P_i(a_j) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots\ldots, k\} \ ; \ j \neq i \end{cases}$$

($a_1, \ldots\ldots, a_k$ étant tous distincts).

b) Donner l'expression factorisée de $P_i(x)$.

c) En déduire l'expression de f_i à l'aide de Id, f, f^2, ..., f^{k-1}

PARTIE II

On notera $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

Pour $n \geq 2$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ distinctes.

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$.

1) Montrer qu'il existe n matrices $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots, \pi_n$ éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \ldots\ldots + \lambda_n \pi_n$$

On donnera les expressions de π_i pour tout $i \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ en fonction de P et des matrices $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par $\begin{cases} \mathcal{E}_{ii} = 1 \\ \mathcal{E}_{kj} = 0 \text{ si } (k,j) \neq (i,i) \end{cases}$

2) Montrer que les matrices π_i vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \ldots\ldots + \pi_n = I & (I \text{ matrice unité de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \\ \pi_i \pi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \pi_i & \text{si } i = j \end{cases} \end{cases}$$

3) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$A^p = \lambda_1^p \pi_1 + \lambda_2^p \pi_2 + \ldots\ldots + \lambda_n^p \pi_n$$

4) a) Pour k = n, que représentent les E_i du I.3) lorsque f_i est l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est la matrice π_i ?

b) Montrer que si X est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que $\pi_i X \neq 0$ alors $\pi_i X$ est vecteur propre de A.

c) Calculer $\pi_i X_j$ pour $(i,j) \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}^2$

d) En déduire le rang de π_i et une particularité concernant les vecteurs colonnes de π_i.

e) A partir de cette dernière remarque donner une méthode simple pour former la matrice P par la seule connaissance des matrices π_i.

.../...
TOURNER S.V.P.

5) a) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $H_i = \mathcal{E}_i H$ et $K_i = H \mathcal{E}_i$; expliquer comment on passe de H à H_i et de H à K_i.

b) En déduire, une fois exprimée une matrice P, l'expression de son inverse P^{-1} par la seule connaissance des matrices π_i.

6) Montrer que les matrices π_1, π_2, ..., π_n ont même trace.

7) On suppose la matrice A inversible.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A^{-1}.

b) En déduire que A^{-1} est diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$

c) Montrer que la relation du II.3) est valable pour $p \in \mathbb{Z}$

8) Soit Adj(A) la transposée de la matrice des cofacteurs de A. En supposant A inversible, déduire les valeurs propres et vecteurs propres de Adj(A) ainsi que la trace de cette matrice.

PARTIE III Application numérique

1) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et on choisira la première composante de chacun des vecteurs propres égale à 1.

2) Exprimer en utilisant le I.6)c) chacun des π_i en fonction de I, A, A^2.

3) Donner l'expression de la matrice P en utilisant II.4)c).

4) Déduire alors sans calculs directs sur P l'expression de P^{-1}.